О некоторых свойствах многочленов Чебышёва

Е.И. Жугалева

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

Обоснование. Многочлены Чебышёва играют важную роль в различных областях математики и ее приложений. Они широко используются в численных методах, теории приближений, теории управления, физике, некоторых ветвях инженерии и других областях. Актуальность многочленов Чебышёва обусловлена их свойствами, которые делают их удобными и эффективными для решения различных задач, таких как аппроксимация функций, интерполяция, решение дифференциальных и интегральных уравнений, экстремальных задач.

Цель — изучить свойства многочленов Чебышёва и применить их для решения одной оптимизационной геометрической задачи.

Методы. Численный метод, метод анализа и описания.

Определение 1. *Многочлен Чебышёва первого рода* $T_n(x)$, $n \in N$ определяется на промежутке $[-1;1]$ равенством: $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$.

Свойство 1. $T_n(x)$ — это многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным $2n^{-1}$.

Свойство 2. Справедливо рекуррентное соотношение:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Свойство 3. Многочлены Чебышёва удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

Свойство 4. Если $|x| \geqslant 1$, то $T_n(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + x - \sqrt{x^2-1})^n}{2}$.

Рассмотрим теперь важное экстремальное свойство многочленов Чебышёва первого рода, благодаря которому они широко используются в различных вычислительных процессах и, в частности, в интерполировании функций. Но для начала введем новый термин.

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Отклонением от нуля $||f||_{C[a;\, b]}$ функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ будем называть наибольшее значение $|f(x)|$ на данном отрезке, т. е.

$$\|f\|_{C_{[a;\,b]}} := \max_{x \in [a;\,b]} |f(x)| .$$

В 1854 году П.Л. Чебышёв поставил и решил следующую экстремальную задачу: среди всех многочленов степени n, имеющих единичный старший коэффициент, определить тот, для которого величина отклонения от нуля является наименьшей. П.Л. Чебышёв доказал, что решением этой задачи для $[-1; 1]$ является нормированный многочлен Чебышева $\dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$.

Теорема 1 (экстремальное свойство многочленов Чебышёва). Для всякого многочлена $F_n(x)$ степени n с единичным старшим коэффициентом имеет место неравенство

$$\|F_n\|_{C_{[-1;1]}} \geq 2^{1-n} \|T_n\|_{C_{[-1;1]}} = 2^{1-n}.$$

Следствие 1. Пусть многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, где $a \in R$, $i = 0, n$ таков, что $|P_n(x)| \leqslant 1$ при $|x| \leqslant 1$. Тогда если $|x| > 1$, то $|P_n^{(k)}(x)| \leq |T_n^{(k)}(x)|$ $k = 0, 1 \ldots , n$ и $a_n \leq 2^{n-1}$.

Следствие 2. При $|x| \geqslant 1$, $n \in N$ и $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$|T_{n-1}^{(k)}(x)| \leq |T_n^{(k)}(x)|, \; k = 0,1,2,\ldots$$

Следствие 3. При $x, y \geqslant 1$ $T_n(xy) \leqslant T_n(x) \cdot T_n(y)$.

Применяя теорему 1, а также некоторые свойства комплексных чисел, можно доказать следующий геометрический результат.

Теорема 2. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – n точек на плоскости. На любом отрезке длины l можно найти точку M такую, что $MA_1 \cdot \ldots \cdot MA_n \geq 2(l/4)^n$.

Результаты. Изучены основные свойства многочленов Чебышёва первого рода. С помощью экстремального свойства многочленов Чебышёва доказано некоторое оптимизационное соотношение для точек на плоскости.

Выводы. Среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, на отрезке [–1; 1] наименее отклоняются от нуля нормированные многочлены Чебышёва, причем это единственные многочлены с таким минимальным отклонением, равным 2^{1-n}. Благодаря этому уникальному свойству данные многочлены активно применяются во многих областях математики, являются важнейшим средством теоретических и практических исследований.

Ключевые слова: многочлены Чебышёва; отклонение от нуля; экстремальное свойство.

Список литературы

1. Данилов Ю.А. Многочлены Чебышёва. Минск: Высшая школа, 1984. 160 с.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В 3-х ч. Ч. 2: Линейная алгебра: учебник. Москва: МЦНМО, 2012. 368 с.
3. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. Санкт-Петербург: Лань, 2007. 560 с.
4. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. Москва: Наука, 1983. 384 с.
5. Табачников С.Л. Многочлены. Москва: Фазис, 1996. 158 с.
6. Яглом А.М., Яглом И.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Москва: КомКнига, 2007.

Сведения об авторе:

Екатерина Игоревна Жугалева — студентка, группа 4241, механико-математический факультет; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия. E-mail: katyazhugaleva2004@gmail.com

Сведения о научном руководителе:

Сергей Владимирович Асташкин — доктор физико-математических наук, профессор; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия. E-mail: astashkin.sv@ssau.ru