Несеточный метод решения краевых задач для уравнения Лапласа в односвязной и двусвязной областях

Б.А. Уткин

Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

Обоснование. Требуется провести анализ численного метода, который основан на разложении решений краевых задач по системам неортогональных функций, полученных из фундаментальных функций основного дифференциального оператора граничной задачи. Этап построения решения — приближенное решение интегрального уравнения первого рода, сингулярного вблизи границы.

Цель — дополнение результатов, полученных в [1, 2], сравнение с результатами, полученными методом конечных элементов.

Методы. Границы области, где задано уравнение в частных производных, аппроксимируются точками на вспомогательных контурах, оптимально отстоящих от основной границы. Это помогает «погасить» сингулярность интегрального уравнения. Устойчивость в пространстве L_2 приближенного решения интегрального уравнения вблизи границы доказана в [3]. Для дискретизации интегралов используется метод Гаусса. Метод конечных элементов применяется для сравнения, как альтернативный.

Результаты. Вычислительные эксперименты проведены для первой внутренней граничной задачи для уравнения Лапласа. В задаче для односвязной области, границей которой являлся эллипс с параметрами $a = 1$, $b = 0{,}5$, подбор вспомогательного контура и увеличение числа узлов до 64 позволили увеличить точность решения до 1.0E-05. Точность выше 1.0E-05 можно достичь, используя метод конечных элементов с 298 внутренними и 40 граничными элементами. В задаче для двусвязной области — в кольце с радиусами $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, подбор вспомогательных контуров и число узлов, равное 40, позволяют получить внутри кольца точность 1.0E-06, однако при приближении к границе точность снижается до 1.0E-01 (рис. 1). С увеличением числа узлов квадратурной формулы для определения следа функции, определяемого из интегрального уравнения, возрастает число обусловленности матрицы СЛАУ.

Выводы. Выбор оптимальных вспомогательных контуров и увеличение узлов квадратурной формулы позволяет получить приближенные решения краевых задач в односвязной и двусвязной областях с достаточной точностью. Увеличение числа узлов квадратурных формул увеличивает числа обусловленности СЛАУ, полученных при дискретизации интегральных уравнений, поэтому требуется применение регулирующих алгоритмов. Метод конечных элементов для достижения требуемой точности требует большого числа узлов сетки.

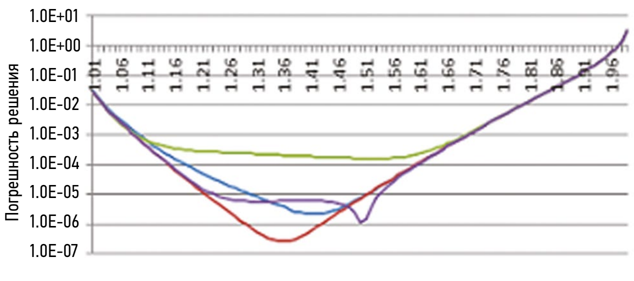

Рис. 1. Погрешность решения краевой задачи в кольце в зависимости от выбора вспомогательных контуров

Ключевые слова: метод конечных элементов; сингулярные интегральные уравнения; граничная задача; фундаментальные функции дифференциального оператора; уравнение Лапласа.

Список литературы

1. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. Москва: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1963. 472 с.
2. Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. Москва: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1991. 352 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. 2-е изд. Москва: Наука, 1979.

Сведения об авторе:

Богдан Алексеевич Уткин — студент, группа 4-ИАиИТ-10М; Институт автоматики и информационных технологий; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: umm97@list.ru

Сведения о научном руководителе:

Людмила Вячеславовна Воропаева — старший преподаватель кафедры Прикладной математики и информатики; Самарский государственный технический университет, Самара, Россия. E-mail: ludmilav2@yandex.ru